Mathematische Spiele und Unterhaltungen

P.Gerl, Salzburg

1. Einleitung

Unterhaltung hat viele Formen und kann auf verschiedenem Niveau stattfinden; im folgenden sollen einige mathematische Spiele und Unterhaltungen beschrieben werden, die verschiedenen Niveaus entsprechen und mathematische Aussagen in verschiedenen Verkleidungen beschreiben. Gerade das Letztere ist sehr wichtig, denn es zeigt sich immer wieder, daß viele Personen erst dann über ein Problem nachzudenken beginnen, wenn es entsprechend eingekleidet ist; das sollte also schon Motiv genug sein, möglichst große Teile der Mathematik so gut wie möglich zu verpacken und sich auch über die Verpackung selbst Gedanken zu machen. Das wird im folgenden allerdings nur teilweise geschehen.

Ein weiterer, sehr wichtiger Aspekt ist die Betonung der Vielfalt der Mathematik; es sind zwar viele Gebiete gut durchforscht und mehr oder weniger abgeschlossen, aber es gibt noch viel mehr offene Probleme, von denen einige durchaus mit etwas Geduld auch für Nichtspezialisten lösbar sind. Nur muß man gelegentlich darauf hinweisen; gerade Aufgaben über Spiele und Unterhaltungen eignen sich hervorragend dazu.

Schließlich scheint mir noch besonders wichtig, immer wieder Freude an mathematischen Fragestellungen zu wecken zu versuchen. Werden (wie meistens)nur fertige Theorien vorgeführt, dann scheint es für den Lernenden ganz hoffnungslos, auch aktiv etwas beitragen zu können. Deshalb sollten, so oft es möglich ist, kleine Probleme (gut verpackt) vorgestellt werden, die gelegentlich doch zum Nachdenken anregen. Auch die im folgenden angeführten konkreten Beispiele sollen nicht gleich gelöst, sondern eher so dargeboten werden, wie ein Physiker eine Reihe von Experimenten durchführt, um schließlich eine neue Erkenntnis zu erhalten (Kennen Sie übrigens den Unterschied zwischen einem Mathematiker und einem Physiker? - Es wird beiden die Aufgabe gestellt, heißes Wasser für einen Tee zu bereiten. Der Physiker: "Ich gebe Wasser in den Teekessel, stelle ihn auf den Herd, schalte diesen ein und warte, bis das Wasser heiß ist !" Der Mathematiker sagt: "Ich mache es genau so." Dann wird die weitere Aufgabe gestellt: "Wie gehen Sie vor, wenn bereits Wasser im Teekessel ist und dieser auf dem Herd steht?" Der Physiker: "Ich schalte den Herd ein und warte, bis das Wasser heiß ist." Der Mathematiker: "Ich nehme den Teekessel vom Herd, schütte das Wasser aus und habe dann die neue Aufgabe auf die alte zurückgeführt.").

2. Spiele

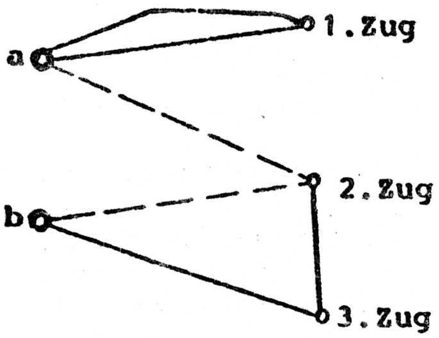
Münzen legen: Zwei Spieler legen abwechselnd je eine Schilling-Münze auf ein rechteckiges Spielbrett. Wer zuletzt eine Münze legen kann, gewinnt. Wer wird gewinnen? - Die Lösung ist sehr einfach, wenn man sie kennt. Der erste Spieler legt seine erste Münze genau in die Mitte des Spielfeldes und legt jede weitere Münze genau symmetrisch (bzgl.des Mittelpunktes des Speilbretts) zur zuletzt gelegten des zweiten Spielers. Auf diese Weise kann der erste Spieler stets gewinnen. Man sagt auch, er hat eine Gewinnstrategie; das ist also eine Regel, die angibt, welche weiteren Züge (die von der jeweiligen Spielsituation abhängen werden) schließlich zum Sieg führen. Allgemein sagen wir ebenso:

Gewinnstrategie eines Spielers = Möglichkeit, die Spielzüge so zu machen, daß er gewinnen wird.

Das (mathematische) Ideal in der Behandlung eines Spieles besteht darin, explizit eine Gewinnstrategie für einen der Spieler anzugeben. Variationen zu Münzen legen: Anderes Spielbrett (nicht rechteckig), andere Spielsteine (nicht Kreisscheiben); obige Symmetrieüberlegung garantiert in vielen Fällen den Sieg des ersten Spielers (bei guter Spielweise).

<u>Spiel 1 mit Graphen:</u> Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Zu Beginn liegen n Pluszeichen (jedes hat 4 freie Arme)vor. <u>Spielzug</u>: Zwei freie Arme (eines oder zweier verschiedener Pluszeichen) verbinden und auf dieser Verbindungslinie ein neues Pluszeichen (mit je einem freien Arm auf verschiedenen Seiten der Verbindungslinie) markieren. Jeder freie Arm darf nur einmal verwendet werden und die Verbindungslinien von freien Armen dürfen sich nicht schneiden (→ es entsteht ein ebener Graph).

$n = 2$



(Fig.1)

<u>Sieger:</u> Wer zuletzt ziehen kann. (Fig.1 zeigt ein Spiel, bei dem 2 Pluszeichen gegeben waren, nach zwei Spielzügen).

<u>Diskussion</u>: n Pluszeichen zu Beginn bedeuten 4n freie Arme; jeder Spielzug verbraucht 2 freie Arme und schafft ebensoviele, also sind in jeder Spielsituation 4n freie Arme vorhanden. Im Laufe des Spieles wird durch die gezeichneten Verbindungslinien die Ebene in Gebiete unterteilt. Das Spiel ist zu Ende, wenn in keines dieser entstandenen Gebiete 2 freie Arme weisen (sonst könnte ja weitergespielt werden); andererseits schafft die letzte Verbindungslinie, die so ein Gebiet festlegt, einen freien Arm in diesem Gebiet. Es gibt also zu Spielende genau so viele Gebiete wie freie Arme, das sind 4n. Weiter ist klar, daß der Graph, der zu Spielende vorhanden ist, zusammenhängend ist (denn sonst wären im Außengebiet mindestens 2 freie Arme und es könnte weitergespielt werden). Wir können daher die <u>Euler'sche</u> Formel

$$e - k + f = 2$$

auf den entstandenen Graphen zu Spielende anwenden (dabei ist e = Anzahl der Ecken, k = Anzahl der Kanten, f = Anzahl der Gebiete). Wir zählen wie folgt ab: Jedes Pluszeichen fassen wir auf als bestehend aus 5 Ecken und 4 Kanten. Bei einem Spielzug kommen 3 neue Ecken und 4 neue Kanten dazu (Fig.1). Ist das Spiel nach x Zügen zu Ende, so gilt also (wenn zu Beinn n Pluszeichen, also 5 n Ecken und

4 n Kanten vorhanden waren): $e - k + f = (5n + 3x) - (4n + 4x) + 4n =$ daher ist $x = 5n - 2$. Dieses Spiel ist also nach genau $5n - 2$ Spielzügen zu Ende; dabei ist ganz egal, wie die einzelnen Spieler spielen. Es folgt somit: Jede Strategie ist eine Gewinnstrategie für den

1.Spieler, wenn n ungerade ist,

2.Spieler, wenn n gerade ist.

Es liegt also kein Spiel im üblichen Sinn vor (der 1.Spieler kann spielen, wie er will; er wird immer gewinnen müssen, wenn n ungerade ist).

Die oben angegebene Euler'sche Formel hat außerordentlich viele Anwendungen, von denen noch eine zitiert werden soll, die sich auf den sogenannten Kraftwerksgraphen bezieht.

H_1 o	H_2 o	H_3 o
o S	o G	o W

(Fig.2)

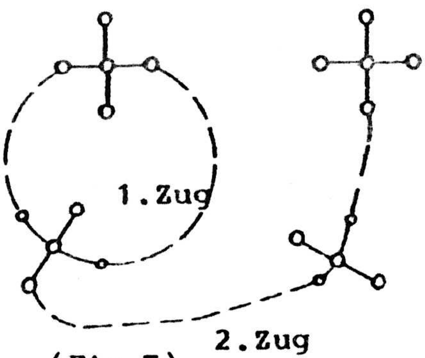
3 Häuser H1, H2, H3 sollen mit Strom (S), Gas (und Wasser (W) versorgt werden. Ist es möglich, die Leitungen so zu legen, daß sie sich nicht kreuzen? (Fig.2)

Wenn das möglich ist, dann entsteht also ein ebener, zusammenhängender Graph mit $e = 6$ Ecken $k = 9$ Kanten und daher ($e-k+f=6-9+f=2$) $f=5$ Gebieten. Da es in diesem Graphen keine Dreiecke gibt, (jedes Gebiet hat mindestens 4 Kanten), gilt $18=2k\geq 4f=20$, ein offensichtlicher Widerspruch. Also müssen Überkreuzungen der Leitungen auftreten.

Literatur: [13],[5],(s.11-18)

<u>Spiel 2 mit Graphen</u>: Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Zu Beginn sind n Punkte gegeben.

n = 2



(Fig.3)

<u>Spielzug:</u> Ein neuer Punkt wird gewählt und dieser wird durch 2 Verbindungslinien mit bereits vorhandenen Punkten (die zusammenfallen können) verbunden. Dabei dürfen:

- sich Verbindungslinien nicht schneiden
- durch jeden Punkt höchstens 3 Linien gehen (es entsteht also kein ebener Graph).

Sieger: Wer zuletzt ziehen kann. (Fig.3 zeigt ein Spiel, bei dem 2 Punkte gegeben waren, nach 3 Spielzügen).

Eine vollständige Analyse dieses Spiels steht noch aus, aber es ist leicht zu sehen, daß höchstens 3n-1 Spielzüge möglich sind: Die n Punkte zu Beginn liefern 3n mögliche Kantenendpunkte. Jeder Spielzug schafft einen neuen Punkt, also 3 mögliche Kantenendpunkte, verbraucht aber 4 Kantenenden (da 2 Verbindungskanten gezogen werden). Daher verringert jeder Spielzug die möglichen Kantenendpunkte um 1. Nach 3n-1 Zügen (wenn überhaupt so viele möglich sind) bleibt also nur mehr 1 möglicher Kantenendpunkt; es kann also keine Kante mehr eingezeichnet werden.

Es ist im allgemeinen nicht bekannt, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat (das Problem ist, daß der Graph bei Spielende nicht zusammenhängend sein muß). Mit vielen Fallunterscheidungen konnte gezeigt werden: Bei n=3,4,5 (1,2,6) kann der erste (zweite) Spieler bei guter Spielweise gewinnen.

Literatur: [5] (S.11-18), [9]

Es gibt aber doch allgemeine Aussagen, die auch bei Spielen wie diesem die Existenz von Gewinnstrategien für einen der Spieler sichern, wenn nun das Spiel nach endlich vielen Zügen endet.

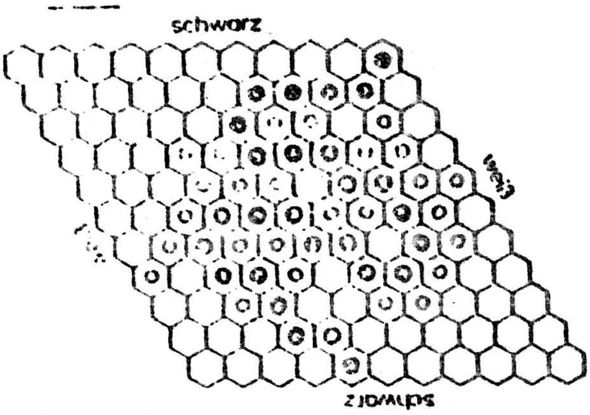
Satz von der Existenz von Gewinnstrategien: Erfüllt ein Zweipersonenspiel 1) die Spieler ziehen abwechselnd

2) es gibt kein Unentschieden

3) das Spiel ist nach höchstens N ($1 < N < \infty$) Spielzügen aus,

dann hat einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie (das bedeutet also, daß bei optimaler Spielweise stets der gleiche Spieler das Spiel gewinnen wird) (vgl. [8],S.160-161).

Hex:



(Fig.4)

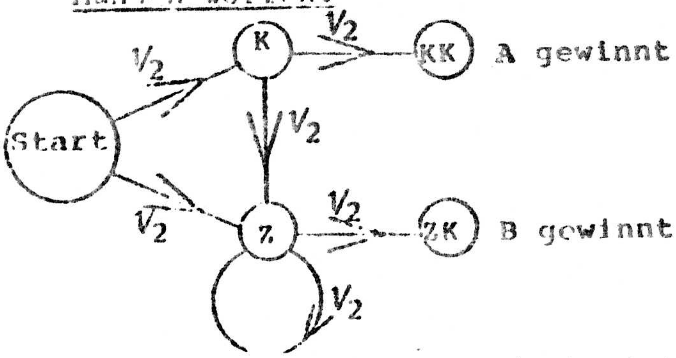
Zwei Spieler S (W) legen abwechselnd je einen • (o) Stein in ein Feld eines 11 × 11 - Spielbrettes; S (W) gewinnt, wenn er zuerst eine • (o) - Kette von schwarz nach schwarz (weiß nach weiß) hat (Fig.4 zeigt eine Gewinnkette für S).

Diskussion: Es ist (zumindest anschaulich) leicht einzusehen, daß Hex nicht unentschieden enden kann; denn stellt man sich etwa W als Wasser und S als Dammbauer vor (•-Steine sind Erhöhungen, o-Steine Vertiefungen), dann muß bei Spielende entweder das Wasser weiß mit weiß verbunden oder aber ein Damm von schwarz nach schwarz entstanden sein. Eine genauere Analyse zeigt, daß der erste Spieler stets eine Gewinnstrategie hat (das folgt auch aus dem vorigen Satz, da das Spiel nach höchstens N = 11:11 Zügen zu Ende ist); allerdings ist bis heute unbekannt, wie diese aussieht. - Es ist außerdem bemerkenswert, daß die obige Aussage, es kann kein Unentschieden geben, äquivalent ist zum BROUWER'schen Fixpunktsatz in der Ebene ("Jede stetige Abbildung des abgeschlossenen Einheitsquadrates in sich hat mindestens einen Fixpunkt").

Literatur: [33], [43] (S.33-39)

7. Glücksspiele

Münzen werfen:



Eine gute Münze wird so lange geworfen, bis hintereinander KK (Kopf-Kopf) oder ZK (Zahl-Kopf) vorkommt. Spieler A gewinnt, wenn zuerst KK vorkommt, Spieler B gewinnt, wenn zuerst ZK vorkommt.

Ist dieses Spiel fair? (d.h. ist die Wahrscheinlichkeit, daß A gewinnt, gleich der Wahrscheinlichkeit, daß B gewinnt?)

Diskussion: Fig.5 stellt den Ablauf des Spieles symbolisch dar; dabei bedeutet ein Pfeil, daß die Münze geworfen wird, und die Zahl bei einem Pfeil die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses, das beim Pfeilende steht. Spieler A hat nur eine einzige Möglichkeit, zu gewinnen: Es muß nämlich beim ersten Wurf und auch beim zweiten die Münze K zeigen. Beides tritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein, also gilt

$$W\ (A\ \text{gewinnt}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ und daher}$$

$$W\ (B\ \text{gewinnt}) = 1 - W\ (A\ \text{gewinnt}) = \frac{3}{4}$$

(denn in allen anderen Fällen wird schließlich B gewinnen). Das Spiel ist also recht unfair.

Variation: Was ergibt sich, wenn Spieler B bei KZ (statt bei ZK) gewinnt? Es ist leicht zu sehen, daß dann das Spiel fair wird.

Literatur: [2] (Band 2)

Kette bilden:

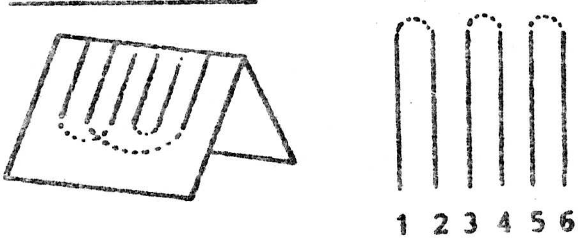


Fig.6

Auf einem Blatt Papier werden 6 (2n) parallele Geradenstücke gezeichnet, das Papier wird dann in der Mitte gefaltet. Der 1.Spieler verbindet je 2 Enden einer Seite, der 2.Spieler je 2 Enden der anderen Seite. Der 1.Spieler gewinnt, wenn ein Ring entsteht, der 2.Spieler gewinnt, wenn mehrere Ringe entstehen. - Ist dieses Spiel fair? (d.h. ist W (Ring) = W (mehrere Ringe) ?)

Diskussion: Entscheidend ist hier, die verschiedenen Möglichkeiten einigermaßen übersichtlich abzuzählen. Das kann so geschehen: Nachdem der 1.Spieler seine Verbindungen eingezeichnet hat, werden die Geradenstücke eventuell umgeordnet und so nummeriert wie in Fig.6, rechts. Bei welchen Verbindungen des 2.Spielers entsteht ein Ring? Er kann 1 mit 3,4,5 oder 6 verbinden (4 Möglichkeiten) und dann 2 mit weiteren zwei Geradenstücken (2 Möglichkeiten). Für einen

Ring gibt es also 8 = 4.2 Möglichkeiten. Die Anzahl aller möglichen Verbindungen des 2.Spielers wird analog bestimmt: Er kann 1 mit 2,3,4,5 oder 6 verbinden (5 Möglichkeiten) und dann das nächste freie Geradenende mit 3 weiteren; das ergibt insgesamt 15 = 5.3 Verbindungsmöglichkeiten. Also gilt

$$W\ (\text{Ring}) = \frac{8}{15} = 0{,}5333\ \ldots > \frac{1}{2}$$

(und allgemein bei 2n Geradenstücken

$$W\ (\text{Ring}) = \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\ ),$$

das Spiel ist also nicht fair (für kein n fair).

Literatur: [63] (s.189-190)

4. Ratespiele

Münzen drehen: A legt einige Münzen auf den Tisch; B dreht mehrmals je zwei Münzen gleichzeitig um und verdeckt am Schluß eine Münze. A kann dann gleich sagen, ob die verdeckte Münze K oder Z zeigt.

Diskussion: Diesem Spiel liegt die Einteilung der natürlichen Zahlen in Gerade und Ungerade zugrunde. Ist am Anfang etwa die Zahl der Münzen, die Z zeigen, gerade, dann bleibt diese Zahl während des ganzen Spieles gerade (es wird ja entweder KK, ZZ oder KZ umgedreht; die Anzahl der Münzen, die danach Z zeigen, ändert sich dabei um +2, -2 oder 0, bleibt also gerade). Wenn A die nicht-verdeckten Münzen ansieht, geht es also nur um die Zahl der Z, die zu sehen sind. Ist diese Zahl gerade, so zeigt die verdeckte Münze K, ist sie ungerade, so Z.

Vertauschen zweier Buchstaben: Ein geschlossener Linienzug wird gezeichnet, so daß nur Doppelpunkte entstehen; jeder Doppelpunkt wird mit einem Buchstaben bezeichnet. B durchläuft den Linienzug und ruft A der Reihe nach die besuchten Buchstaben zu. An einer beliebigen Stelle darf B einmal 2 benachbarte Buchstaben vertauschen. A kann schließlich sagen, welche Buchstaben vertauscht wurden.

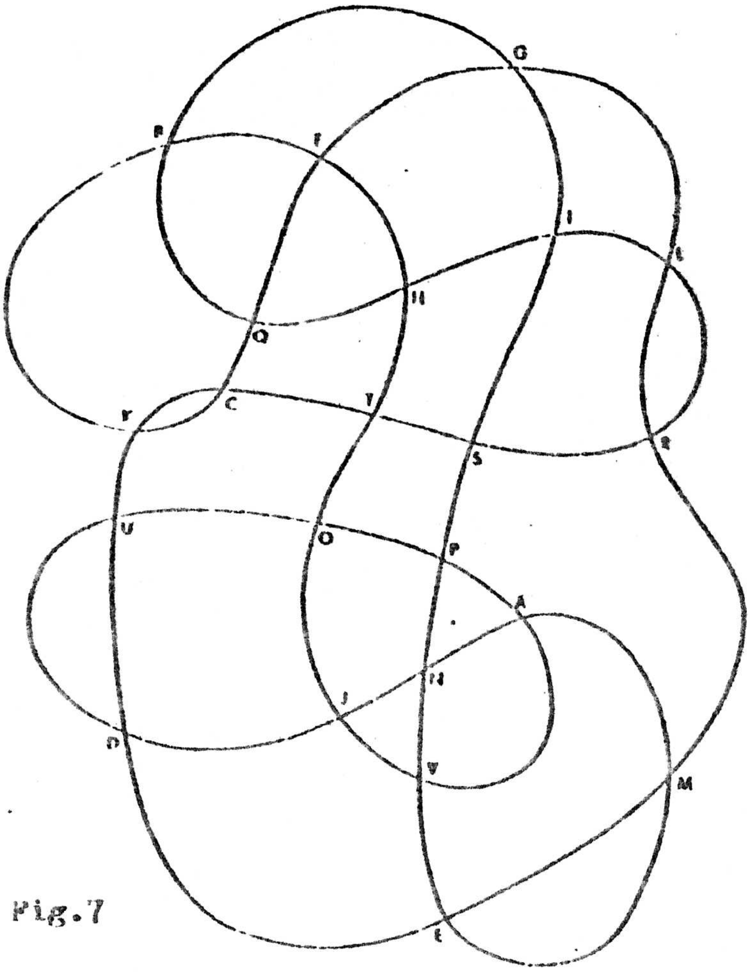


Fig.7

NSGQIRTKDMILFCFHOYPUJAE
PIBHLSCUERGQKBIJACONMV

Fig.7a

Diskussion: Die mathematische Aussage, die diesem Spiel zugrunde liegt, hat bereits C.F.GAUSS gekannt, nämlich: zwischen zwei gleichen Buchstaben kommt eine gerade Anzahl anderer Buchstaben vor. Wenn also B an einer Stelle zwei benachbarte Buchstaben (etwa X und Y) vertauscht, dann sind zwischen X und X (und auch zwischen Y und Y) eine ungerade Zahl von anderen Buchstaben. Notiert sich also A die zugerufenen Buchstaben wie in Fig.7a (1. Buchstabe über dem Strich, 2. darunter, 3. darüber, ...), so sind genau jene vertauscht worden, die zweimal über bzw. unter dem Strich vorkommen. Literatur: [73](S.42-47; dieser Artikel ist sehr lesbar und enthält auch eine Anwendung auf die Projektion von Knoten).

Neunertrick: B wählt eine natürliche Zahl a (z.B. 34406), ordnet die Ziffern irgendwie um und enthält a' (z.B.40364). B bildet die Differenz [a-a'] (größere minus kleinere Zahl, also 5958) und streicht dann im Endergebnis eine beliebige Ziffer $\neq 0$ (z.B.8). Werden A die restlichen Ziffern mitgeteilt (595), so kann A gleich die gestrichene Ziffer nennen.

Diskussion: Schreibt man $a = a_0 + a_1 . 10 + ... + a_k 10^k$, so gilt $a \equiv a_0 + a_1 + ... + a_k \pmod 9$; da a' die gleiche Ziffernsumme wie a hat,

$a' \equiv a_0+a_1+\ldots+a_k \pmod 9$, ist daher $a-a' \equiv 0 \pmod 9$, also $|a-a'|$ durch 9 teilbar. Die Ziffernsumme von $|a-a'|$ ist somit ein Vielfaches von 9. Die von B gestrichene Ziffer ist daher die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß ein Vielfaches von 9 entsteht, wenn sie zur Ziffernsumme der mitgeteilten Zahl addiert wird.

Im Zahlenbeispiel wird 595 mitgeteilt. Die Ziffernsumme ist $5+9+5=19$; wird 8 addiert, so ergibt sich $27=3.9$, also wurde 8 gestrichen.

5. Verschiedenes

Tetraeder aus Rechteck (Tetrapak)

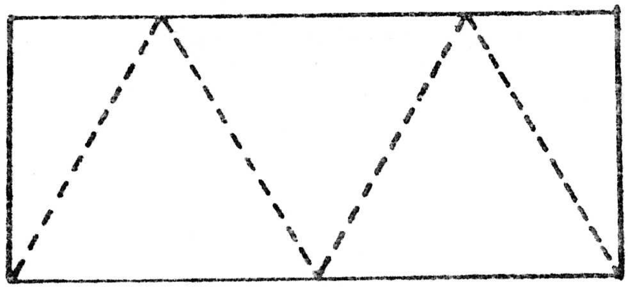


Fig.8

Vollständige Induktion: "Alle Personen in diesem Hörsaal sind gleich groß." - "Beweis" durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für 1 Person (N=1) stimmt die Behauptung.

Induktionsschluß: $N-1 \rightarrow N$

Von den N Personen im Hörsaal wird eine (A) hinausgeschickt; nach Induktionsannahme sind die restlichen N-1 alle gleich groß. Dann wird A wieder hereingeholt und eine andere Person hinausgeschickt; wieder sind nach Induktionsannahme die verbleibenden N-1 gleich groß (also ist A so groß wie jede andere). Daher sind alle N Personen in diesem Hörsaal gleich groß.

(Der Induktionsschluß versagt für N=2, also für $1 \rightarrow 2$).

Literatur:

[1] D'Alarcao H.-Th. E.Moore: Euler's formula and a game of Conway's. J.recreational Math.9 (1976-77),249-251

[2] Engel A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Klett Stuttgart 1978

[3] Gale D.: The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. Am.Math.Monthly,86 (1979),818-827

[4] Garner M.: Mathematische Rätsel und Probleme. Friedr.Vieweg + Sohn, Braunschweig 1975

[5] Garner M.: Mathematischer Karneval. Ullstein Gmbh, Frankfurt/ Berlin, 1978

[6] Gardner M.: Mathematisches Labyrinth. Friedr.Vieweg + Sohn, Braunschweig 1979

[7] Rademacher H.O. Toeplitz: Von Zahlen und Figuren. Heidelberger Taschenbuch 50, Springer-Verlag, Berlin 1968

[8] Saaty Th.L.: Optimization in integers and related extremal problems. McGraw-Hill Book Company, New York 1970

[9] Simoes-Pereira J.M.S. - I.M.S.M.Zuzarte: Some remakes on a game with graphs. J.recreational Math.6 (1973),54-60

Prof.Dr. Peter Gerl
Institut für Mathematik
Universität Salzburg
Petersbrunnstraße 19
5020 Salzburg